

УДК 519.63

**ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ
АПОСТЕРИОРНЫХ ОЦЕНОК ДЛЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ¹⁾****М.А. ЧУРИЛОВА***Санкт-Петербургский Государственный Политехнический Университет**E-mail m_churilova@mail.ru***THEORETICAL AND NUMERICAL INVESTIGATION OF FUNCTIONAL A POSTERIORI ERROR
ESTIMATES FOR PLANE PROBLEMS OF LINEAR ELASTICITY****M.A. CHURILOVA***Saint-Petersburg Polytechnic University***Аннотация**

В работе рассмотрены известные функциональные апостериорные оценки погрешности для задач линейной упругости. Исследованы основные вычислительные свойства оценок, проведен сравнительный анализ их применения для адаптации сеток при решении задачи о плоской деформации изотропного тела. Для улучшения качества вычисляемых оценок привлекается смешанная аппроксимация Равьяра-Тома нулевого порядка. Преимущества предложенного подхода подтверждаются численными экспериментами.

Ключевые слова: функциональные апостериорные оценки, линейная упругость, адаптивные алгоритмы, аппроксимации Равьяра-Тома.

Summary

Article is devoted to the functional approach to computation of a posteriori error estimates and mesh adaptation for linear elasticity. Two existing error majorants are considered and their basic computational properties are proven. Benefits of proposed method are approved by numerical experiments for a plane strain problem with isotropic material. To increase the efficiency of computed estimates the mixed Raviart-Thomas lowest order approximation is used.

Key words: functional a posteriori error estimates, linear elasticity, adaptive algorithms, Raviart-Thomas approximations.

Введение

На сегодняшний день в большинстве инженерных исследований привлекаются расчеты в коммерческих программных пакетах, реализующих метод конечных элементов. При этом остается недостаточно изученной проблема оценки точности получаемых приближенных решений, а также индикации зон с наибольшей погрешностью с целью последующей адаптации расчетной сетки. Имеющиеся в существующих пакетах классические подходы доступны для узкого класса задач и не удовлетворяют требованиям достаточной надежности и универсальности. Применяемый в работе функциональный подход позволяет вычислять гарантированные оценки энергетической нормы погрешности для широкого круга краевых задач (см. [1, 2]). В мажоранту погрешности помимо приближенного решения задачи и исходных данных (геометрия области, правая часть, коэффициенты и т.п.) входят также свободные переменные, правильный выбор которых позволяет повысить качество оценки. Приближенное решение должно удовлетворять

¹⁾Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-31273-мол_а)

лишь условию конформности. Тип аппроксимации, с помощью которой оно получено, не имеет решающего значения.

Проведенное исследование нацелено на анализ работы адаптивных алгоритмов, основанных на функциональных апостериорных оценках для плоских задач линейной упругости, полученных в [1] и [3]. Оно является продолжением работ [3–5], в которых рассматривались функциональные апостериорные оценки для задачи плоской деформации.

1. Апостериорные оценки погрешности для линейной упругости

Классическая постановка рассматриваемой задачи имеет следующий вид: найти тензорные поля деформаций ε и напряжений σ , а также векторное поле перемещений u , удовлетворяющие системе соотношений

$$\begin{cases} \sigma = \mathbb{L}\varepsilon(u) \text{ в } \Omega, \\ \operatorname{Div} \sigma + f = 0 \text{ в } \Omega, \\ u = u_0 \text{ на } \Gamma_1, \\ \sigma n = F \text{ на } \Gamma_2, \end{cases} \quad (1)$$

где упругое тело занимает область $\Omega \in \mathbb{R}^3$, его граница Γ состоит из двух непересекающихся частей $\Gamma_1 \neq \{\emptyset\}$ и Γ_2 ; $\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$; $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ — плотность объемных сил; $F \in L^2(\Gamma_2, \mathbb{R}^3)$ — заданные на части границы Γ_2 поверхностные силы; $u_0 \in W_2^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ — заданные на части границы Γ_1 перемещения; \mathbb{L} — тензор упругих констант. Предполагается, что существуют положительные постоянные l_1 и l_2 , такие что

$$l_1^2 |\varepsilon|^2 \leq \mathbb{L}\varepsilon : \varepsilon \leq l_2^2 |\varepsilon|^2, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{M}_{sym}^{3 \times 3},$$

где $\mathbb{M}_{sym}^{3 \times 3}$ — пространство симметричных тензоров второго ранга размерности 3, а $|\varepsilon|^2 = \varepsilon : \varepsilon$. Также предполагается, что компоненты тензора ограничены и удовлетворяют условиям симметрии, т.е.

$$\mathbb{L}_{ijklm} = \mathbb{L}_{jiklm} = \mathbb{L}_{kmlji}, \quad \mathbb{L}_{ijklm} \in L^\infty(\Omega), \quad i, j, k, m = \overline{1, 3}.$$

Основой для вывода апостериорной оценки является обобщенная постановка задачи (1): найти функцию $u \in V = u_0 + V_0$, где $V_0 = \{w \in W_2^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \mid w = 0 \text{ на } \Gamma_1\}$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \mathbb{L}\varepsilon(u) : \varepsilon(w) dx = \int_{\Omega} f \cdot w dx + \int_{\Gamma_2} F \cdot w ds, \quad \forall w \in V_0.$$

Функциональные мажоранты оценивают энергетическую норму погрешности

$$|||u - v|||^2 := \int_{\Omega} \mathbb{L}\varepsilon(u - v) : \varepsilon(u - v) dx.$$

Для краткости введем обозначения $\Sigma(\Omega) = L^2(\Omega, \mathbb{M}^{3 \times 3})$, $\Sigma_s(\Omega) = L^2(\Omega, \mathbb{M}_{sym}^{3 \times 3})$. Первая апостериорная оценка (см. [3]) имеет вид

$$\begin{aligned} |||u - v|||^2 &\leq M_{LE}^2(v, \tau, \beta) = \\ &= (1 + \beta) |||\tau - \mathbb{L}\varepsilon(v)|||_*^2 + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) C^2 (\|\operatorname{Div} \tau + f\|^2 + \|F - \tau n\|_{\Gamma_2}^2) \end{aligned} \quad (2)$$

и справедлива для любого симметричного тензора $\tau \in H(\Omega, \Gamma_2, \operatorname{Div})$ и произвольного параметра $\beta > 0$, где

$$H(\Omega, \Gamma_2, \operatorname{Div}) = \{\tau \in \Sigma(\Omega) \mid \operatorname{Div} \tau \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3), \tau n \in L^2(\Gamma_2, \mathbb{R}^3)\},$$

а вспомогательная норма определяется по формуле $|||\tau|||_*^2 = \int_{\Omega} \mathbb{L}^{-1}\tau : \tau dx$. Константа C должна удовлетворять неравенству

$$\int_{\Omega} |w|^2 dx + \int_{\Gamma_2} |w|^2 ds \leq C^2 |||w|||^2 \quad \forall w \in V_0.$$

Вторая оценка не накладывает ограничения на свободный тензор $\hat{\tau} \in \mathbf{H}(\Omega, \Gamma_2, \text{Div})$ и выглядит следующим образом (см. [1])

$$\begin{aligned} |||u - v|||^2 &\leq \widehat{M}_{LE}^2(v, \hat{\tau}, \beta_1, \beta_2) := (1 + \beta_1) |||\hat{\tau}_{\text{sm}} - \mathbb{L}\varepsilon(v)|||_*^2 + \\ &+ \left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right) (1 + \beta_2) C^2 (\|\text{Div}\hat{\tau} + f\|^2 + \|\hat{\tau}n - F\|_{\Gamma_2}^2) + \\ &+ \left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right) \left(1 + \frac{1}{\beta_2}\right) \left(\frac{C_{\Omega\Gamma_1}}{l_1}\right)^2 \|\hat{\tau}_{\text{sk}}\|^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\beta_1 > 0$ и $\beta_2 > 0$ — свободные параметры, а $\hat{\tau}_{\text{sm}}$ и $\hat{\tau}_{\text{sk}}$ — симметричная и кососимметричная части тензора $\hat{\tau}$, соответственно. Оценка (3) совпадает с (2), если тензор $\hat{\tau}$ симметричен. Дополнительное слагаемое в (3), содержащее кососимметричную часть тензора, играет роль «штрафа». Обе оценки точны, поскольку совпадают с нормой погрешности на точных значениях поля напряжений.

2. Вычислительные свойства функциональных оценок

Введем обозначение $\mathcal{H} := \mathbf{H}(\Omega, \Gamma_2, \text{Div})$. Можно показать, что справедливы следующие утверждения:

Теорема 1. Если последовательность конечномерных подпространств $\{\mathcal{H}_s^i\}_{i=1}^{\infty}$ предельно плотна в $\mathcal{H}_s = \mathcal{H} \cap \Sigma_s(\Omega)$, то

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \inf_{\substack{\tau_i \in \mathcal{H}_s^i \\ \beta > 0}} M_{LE}^2(v, \tau_i, \beta) = |||u - v|||^2.$$

Аналогично, если последовательность $\{\mathcal{H}^i\}_{i=1}^{\infty}$ предельно плотна в \mathcal{H} , то

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \inf_{\substack{\hat{\tau}_i \in \mathcal{H}^i \\ \beta_1 > 0, \beta_2 > 0}} \widehat{M}_{LE}^2(v, \hat{\tau}_i, \beta_1, \beta_2) = |||u - v|||^2.$$

Теорема 2. Пусть в условиях Теоремы 1 последовательность пар (τ_i, β_i) , минимизирующих $M_{LE}^2(v, \tau, \beta)$ на $\mathcal{H}_s^i \times \mathbb{R}^+$, такова, что $\beta_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, тогда $\tau_i \rightarrow \sigma$ в \mathcal{H}_s при $i \rightarrow \infty$.

Аналогичное утверждение также верно и для мажоранты $\widehat{M}_{LE}(v, \hat{\tau}, \beta_1, \beta_2)$.

Мажоранту M_{LE} можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$M_{LE}^2(v, \tau, \beta) = (1 + \beta) m_{LE1}^2 + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) m_{LE2}^2,$$

где

$$m_{LE1}^2 = |||\tau - \mathbb{L}\varepsilon(v)|||_*^2, \quad m_{LE2}^2 = C^2 (\|\text{Div}\tau + f\|^2 + \|F - \tau n\|_{\Gamma_2}^2).$$

Мажоранту \widehat{M}_{LE} также можно записать в виде суммы

$$\widehat{M}_{LE}^2(v, \hat{\tau}, \beta_1, \beta_2) = (1 + \beta_1) \hat{m}_{LE1}^2 + \left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right) \hat{m}_{LE2}^2,$$

где

$$\begin{aligned} \hat{m}_{LE1}^2 &= |||\hat{\tau}_{\text{sm}} - \mathbb{L}\varepsilon(v)|||_*^2, \\ \hat{m}_{LE2}^2 &= (1 + \beta_2) C^2 (\|\text{Div}\hat{\tau} + f\|^2 + \|\hat{\tau}n - F\|_{\Gamma_2}^2) + \left(1 + \frac{1}{\beta_2}\right) \left(\frac{C_{\Omega\Gamma_1}}{l_1}\right)^2 \|\hat{\tau}_{\text{sk}}\|^2. \end{aligned}$$

Тогда по Теореме 2

$$m_{LE1}^2 \xrightarrow{i \rightarrow \infty} |||u - v|||^2, \quad m_{LE2}^2 \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0,$$

$$\hat{m}_{LE1}^2 \xrightarrow{i \rightarrow \infty} |||u - v|||^2, \quad \hat{m}_{LE2}^2 \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

Поэтому в качестве индикатора погрешности, как в случае симметричного тензора τ , так и при отсутствии ограничения симметрии, можно использовать только первое слагаемое мажоранты. По аналогии с мажорантой для уравнения Пуассона, рассмотренной в [6], можно показать, что оно предоставляет качественный индикатор локального распределения погрешности.

3. Пример

Вычисление мажорант погрешности (2) и (3) реализовано в программном комплексе MATLAB. Основная задача при их вычислении — построить свободный тензор и найти константы, входящие в оценку. Для нахождения тензора использовались непрерывные кусочно-линейные аппроксимации метода конечных элементов, а также смешанные аппроксимации Равьяра-Тома нулевого порядка. И в том, и в другом случае искомым тензор находится из необходимого условия минимума соответствующего функционала при фиксированных константах и приближенном решении, представляющего собой систему линейных алгебраических уравнений. Для адаптации расчетной сетки индикация погрешности на каждом шаге производится по величине локальных вкладов первого слагаемого мажоранты. Для контроля качества сеток, получаемых с помощью различных индикаторов, применяется «эталонный» индикатор, представляющий собой энергетическую норму разности приближенного и «эталонного» решения на каждом элементе и обозначенный η_T^{ref} . В качестве эталонного решения выбирается приближенное решение, полученное на более мелкой сетке. С помощью эталонного решения также вычисляется индекс эффективности (отношение мажоранты к оцениваемой норме) и относительная погрешность. Для численного исследования выбрана задача о плоской деформации изотропного и однородного тела, которая является упрощением исходной трёхмерной постановки. Чтобы не усложнять систему обозначений, будем считать, что за ε и σ обозначаются плоские составляющие соответствующих тензоров.

Рассмотрим характерный пример, в котором тело состоит из нескольких материалов. Геометрия области изображена на рисунке (а), результаты адаптации сетки с различными индикаторами погрешности представлены на рисунках (б–г). Несколько шагов адаптации приведены в таблице, за $\varepsilon\%$ обозначена относительная погрешность, N — число узлов расчетной сетки, а I_{eff} — индекс эффективности. За η_T^{con} обозначается индикатор погрешности, основанный на мажоранте (2) со стандартными непрерывными аппроксимациями, а за η_T^{RT} — индикатор, основанный на (3) с использованием смешанных аппроксимаций Равьяра-Тома нулевого порядка.

Табл. 1: Сравнение шагов адаптации сетки

η_T^{ref}		η_T^{con}			η_T^{RT}		
N	$\varepsilon\%$	N	$\varepsilon\%$	I_{eff}	N	$\varepsilon\%$	I_{eff}
155	21.26	155	21.26	1.83	155	21.26	2.00
405	11.16	528	11.62	2.27	406	11.51	2.14
1672	5.38	2812	5.34	2.96	1904	5.18	2.18
3579	3.59	6183	3.71	3.36	4013	3.59	2.16
7113	2.55	17849	2.40	3.79	8891	2.37	2.20

Сетка полученная для индикатора с непрерывными аппроксимациями (в) далека от эталонной (б) по своей локальной структуре. Как видно из рисунка, в ней возникает зона сгущения узлов на границе стыка двух материалов, которой, как показывает эталонный индикатор, быть не должно. При использовании аппроксимаций Равьяра-Тома (г), которые в отличие от непрерывных допускают разрыв касательной составляющей вектора при переходе через границу конечного элемента, подобной проблемы не возникает.

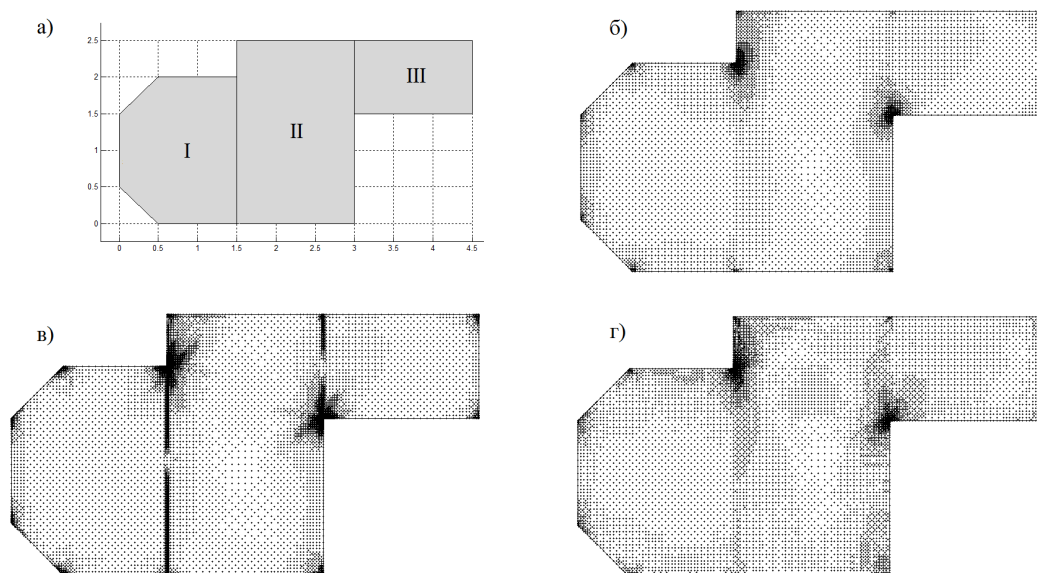


Рис. 1: Геометрия области (а); результат работы адаптивных алгоритмов с индикаторами η_T^{ref} (б), η_T^{con} (в), η_T^{RT} (г)

Из таблицы можно сделать вывод, что соответствующая глобальная оценка (2) с непрерывными аппроксимациями также неэффективна, так как соответствующий индекс растет с измельчением расчетной сетки. Эти результаты полностью согласуются с полученными в работах [3] и [4]. В свою очередь, оценка (3) и индикатор η_T^{RT} позволяют получить как более точную глобальную оценку нормы погрешности, так и близкую к эталонной адаптивную расчетную сетку.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Repin S.I.** A Posteriori Estimates for Partial Differential Equations. — Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2008. — 316 p.
2. **Mali O., Neittaanmäki P., Repin S.,** Accuracy verification methods. Theory and algorithms. — Dordrecht: Springer, 2014. — 355 p.
3. **Muzalevsky A.V., Repin S.I.** On two-sided error estimates for approximate solutions of problems in the linear theory of elasticity // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2003. — V. 18, № 1. — P. 65–85.
4. **Фролов М.Е.** Применение функциональных оценок погрешности со смешанными аппроксимациями к плоским задачам линейной теории упругости // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2013. — Т. 53, № 7. — С. 1178–1191.
5. **Чурилова М.А.** Некоторые адаптивные алгоритмы решения задач плоской деформации и их сравнительный анализ // Наука и инновации в технических университетах: материалы Седьмого Всероссийского форума студентов, аспирантов и молодых ученых. — 2013. — С. 52–54.
6. **Repin S., Sauter S. and Smolianski A.** A posteriori error estimation for the Dirichlet problem with account of the error in the approximation of boundary conditions // Computing. — 2003. — V. 70, № 3. — P. 205–233.

REFERENCES

1. **Repin S.I.** A Posteriori Estimates for Partial Differential Equations. — Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2008. — 316 p.
2. **Mali O., Neittaanmäki P., Repin S.**, Accuracy verification methods. Theory and algorithms. — Dordrecht: Springer, 2014. — xiii + 355 p.
3. **Muzalevsky A.V., Repin S.I.** On two-sided error estimates for approximate solutions of problems in the linear theory of elasticity // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2003. — V. 18. — № 1. — P. 65–85.
4. **Frolov M.E.** Application of functional error estimates with mixed approximations to plane problems of linear elasticity // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2013. — No. 7 (53). — P. 1000–1012.
5. **Churilova M.A.** Some adaptive algorithms for solving plane strain problems and their comparative analysis [Nekotorye adaptivnye algoritmy reshenija zadach ploskoj deformacii i ih sravnitel'nyj analiz] // Nauka i innovacii v tehniceskikh universitetah: materialy sed'mogo vserossijskogo foruma studentov, aspirantov i molodyh uchenyh. — 2013. — P. 52–54 (in Russian).
6. **Repin S., Sauter S. and Smolianski A.** A posteriori error estimation for the Dirichlet problem with account of the error in the approximation of boundary conditions // Computing. — 2003. — V. 70, № 3. — P. 205–233.